

Το πείραμα του Ερατοσθένη



Ο Ερατοσθένης και το ιστορικό πείραμα



Γεννήθηκε το 276 π.Χ. στην Κυρήνεια της Βόρειας Αφρικής. Σπούδασε στην Αθήνα από όπου προσκλήθηκε το 245 π.Χ. από τον Βασιλέα Πτολεμαίο τον Ευεργέτη για να αναλάβει τη διεύθυνση της νεοϊδρυθείσας βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και την εκπαίδευση του υιού του Φιλοπάτορα.

Θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους σοφούς της Αρχαιότητας και θεμελιωτής της Φυσικής και Μαθηματικής Γεωγραφίας. Ο

σπουδαίος Αρχιμήδης τον εκτιμούσε ιδιαίτερα και του αφιέρωσε το περίφημο έργο του «Περί μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος».

Στην Αλεξάνδρεια έζησε μέχρι το τέλος της ζωής του το 194 π.Χ. Λέγεται ότι προς το τέλος της ζωής του έχασε την όραση του και υπέβαλλε τον εαυτό του σε αναγκαστική ασιτία, που τον οδήγησε στον θάνατο.

Στο έργο του περιλαμβάνονται μεταξύ άλλων η μέτρηση της περιμέτρου της γης, η κατάρτιση καταλόγου αστέρων, η κατάρτιση χαρτών με οικονομικά και εθνογραφικά στοιχεία, ένα ημερολόγιο, μία μέθοδος για την εύρεση των πρώτων αριθμών γνωστή ως «Κόσκινο του Ερατοσθένη», ένα Όργανο για τη λύση του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου.

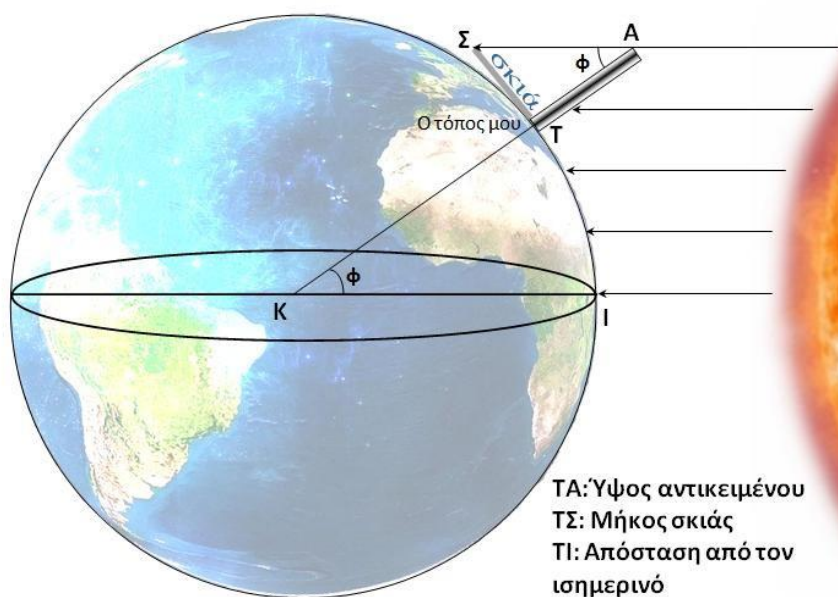
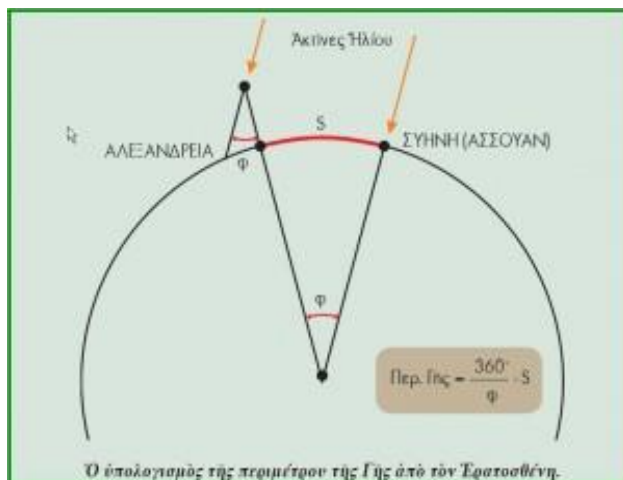
Γύρω στο 230 π.Χ. σε έναν πάπυρο της μεγάλης Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, ο Ερατοσθένης διάβασε ότι το μεσημέρι της 21ης Ιουνίου (θερινό ηλιοστάσιο, η μεγαλύτερη μέρα του τόπου), στα νότια όρια της πόλης Σήνη (σημερινό Ασσουάν), οι κατακόρυφοι στύλοι δεν ρίχνουν καθόλου σκιά και ο Ήλιος καθρεφτίζεται ακριβώς στον πυθμένα ενός πηγαδιού (δηλαδή, βρίσκεται στο Ζενίθ του τόπου). Ως επιστήμονας διερωτήθηκε εάν συμβαίνει το ίδιο ταυτόχρονα και σε μια άλλη πόλη πχ. στην Αλεξάνδρεια. Όμως στην Αλεξάνδρεια, που είναι κτισμένη στις εκβολές του Νείλου ποταμού βορειότερα του Ασσουάν στον ίδιο περίπου μεσημβρινό, κατά την ίδια μέρα και ώρα, οι κατακόρυφοι στύλοι έριχναν σκιά.

Αν η Γη ήταν επίπεδη, οι κατακόρυφοι στύλοι στις δυο πόλεις θα ήταν παράλληλοι και θα έπρεπε και οι δυο να ρίχνουν σκιά. Αφού, λοιπόν, αυτό δεν είναι αλήθεια, τι μπορεί να συμβαίνει; Την απάντηση έδωσε ο Ερατοσθένης υποστηρίζοντας ότι η επιφάνεια της Γης δεν είναι επίπεδη αλλά σφαιρική. Αυτό το συμπέρασμα είναι, προφανώς, θεμελιώδους σημασίας και επιπλέον επέτρεψε στον Ερατοσθένη να προσδιορίσει την ακτίνα και το μήκος της περιφέρειάς της Γης.

Τοποθέτησε έναν κατακόρυφο στύλο στην Αλεξάνδρεια την ίδια ακριβώς ημέρα και ώρα στις 12 το μεσημέρι, μέτρησε τη γωνία που σχημάτιζε η σκιά του και την βρήκε ίση με το ένα πεντηκοστό της περιφέρειας κύκλου και λίγο περισσότερο ακόμη. Η γωνία ήταν $7,2^\circ$ [περίπου 8 πρώτα λεπτά (**γωνία ϕ στο σχήμα**)]. Αφού η Αλεξάνδρεια και η Σύννη βρίσκονται πάνω στον ίδιο μεσημβρινό οι $7,2^\circ$ αντιστοιχούν στο $1/50$ του πλήρη κύκλου ($360/7,2 = 50$).

Η απόσταση των δύο πόλεων ήταν γνωστή από αφηγήσεις βηματιστών και ίση περίπου με 800 Km (φημολογείται ότι ο Ερατοσθένης μίσθωσε βηματιστές για τη μέτρησή της ή ότι μέτρησε αυτήν την απόσταση, χρησιμοποιώντας ένα είδος οδομέτρου με γρανάζια), η περιφέρεια της Γης υπολογίστηκε ίση με 40000 Km.

Αυτή είναι η σωστή απάντηση και ο Ερατοσθένης την έδωσε χρησιμοποιώντας ως μόνα εργαλεία ράβδους, μάτια, πόδια, μυαλό με απλότητα σκέψης και επινοητικότητα. Το λάθος στον υπολογισμό ήταν μόνο 2%, ένα πραγματικά αξιοσημείωτο επίτευγμα για περίπου πριν από 2,5 χιλιετίες. Άρα, ο Ερατοσθένης ήταν ο πρώτος άνθρωπος που μέτρησε τις διαστάσεις του πλανήτη Γη, γι' αυτό και θεωρείται δημιουργός της μαθηματικής γεωγραφίας.



Εξήγηση πειράματος

Το δικό μας πείραμα είναι λίγο διαφορετικό αφού θα εργαστούμε κατά τη διάρκεια της εαρινής ισημερίας και όχι κατά το θερινό ηλιοστάσιο, όπως ο Ερατοσθένης.

Αν θεωρήσουμε ότι ο κύκλος στο διπλανό σχήμα είναι η Γη τότε η έλλειψη στο κέντρο είναι ο ισημερινός. Τις ημέρες κοντά στην **εαρινή ισημερία**, όσοι βρίσκονται στον ισημερινό της Γης θα παρατηρήσουν ότι ο Ήλιος το

μεσημέρι βρίσκεται πολύ κοντά στο ζενίθ. Επομένως οι ακτίνες πέφτουν κατακόρυφα και ο Ήλιος θα μπορούσε να καθρεφτίζεται στον πυθμένα ενός πηγαδιού. Η προέκταση μιας ακτίνας του Ήλιου είναι η ΙΚ και περνάει από το κέντρο της Γης Κ. Έστω ότι εμείς είμαστε στη θέση Τ. Αν τοποθετήσουμε μια κατακόρυφη ράβδο $TA = Y$ cm τότε αυτή το μεσημέρι έχει σκιά $TΣ = X$ cm.

Υπολογίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\phi} = \widehat{\Sigma\hat{A}T}$ από το λόγο X/Y και έτσι βρίσκουμε την γωνία $\hat{\phi}$ σε μοίρες.

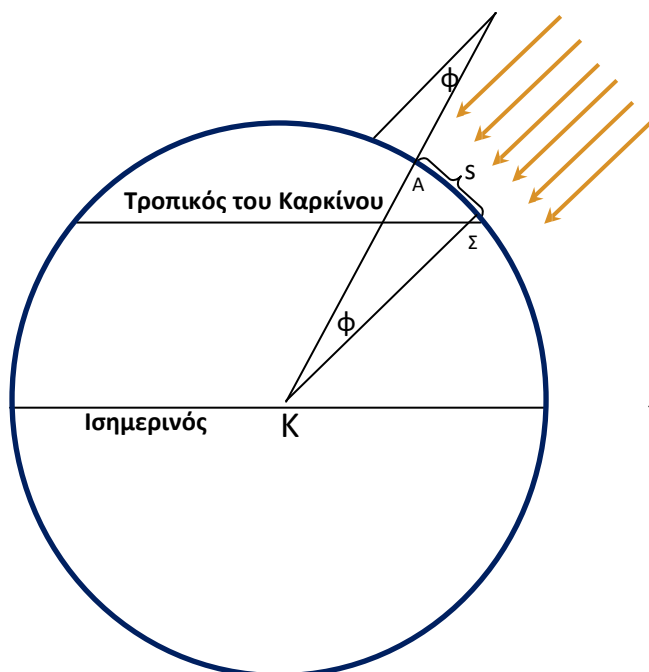
Επειδή ο ήλιος βρίσκεται πολύ μακριά από τη Γη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ακτίνες του είναι παράλληλες. Η γωνία $\hat{\phi}$ είναι ίση με την επίκεντρη γωνία $\widehat{TKI}$ ως εντός και εναλλάξ (όπως φαίνεται στο σχήμα). Άρα λοιπόν το γεωγραφικό πλάτος της θέσης μας είναι $\hat{\phi}$ μοίρες. Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι το μήκος του τόξου TI , η γωνία ϕ και η περίμετρος S της Γης συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{TI}{\phi} = \frac{S}{360^\circ}, \text{ συνεπώς η περίμετρος της Γης είναι: } \boxed{S = TI \cdot \frac{360}{\phi}}.$$

Η ακτίνα της Γης υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση $S = 2\pi R$ η οποία δίνει:

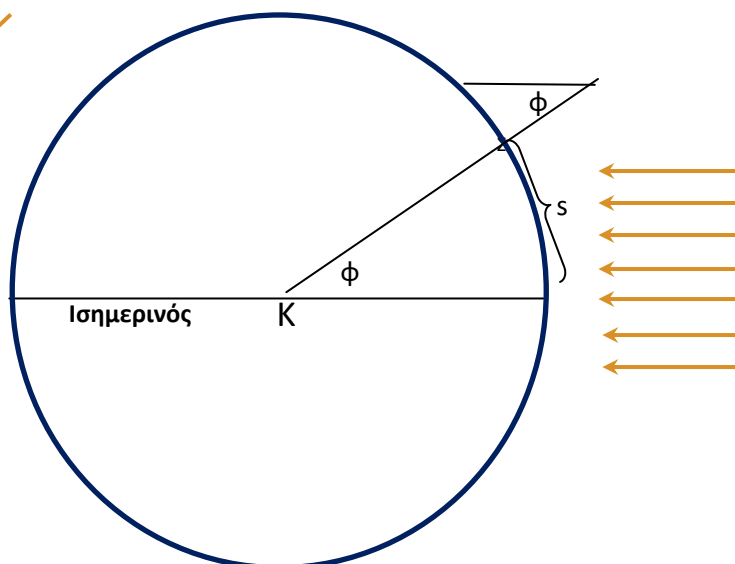
$$\boxed{R = S/2\pi}$$

Θερινό Ηλιοστάσιο



Το Πείραμα του Ερατοσθένη

Εαρινή Ισημερία



Το δικό μας Πείραμα

Υλοποίηση Πειράματος

Φύλλο Εργασίας – Ομάδα

Βήμα 1^ο (στην τάξη) – Εύρεση συντεταγμένων Γυμναστηρίου

Στη διεύθυνση <https://www.google.gr/maps/@37.8341896,24.9338878,15z> (χάρτες Google) άνοιξε την προβολή του δορυφόρου και βρες τις Γεωγραφικές συντεταγμένες του Γυμναστηρίου. Γράψε τις συντεταγμένες στον Πίνακα Μετρήσεων με ακρίβεια χιλιοστού.

Βήμα 2^ο (στην τάξη) – Εύρεση απόστασης Γυμναστηρίου από τον Ισημερινό.

Στην ίδια σελίδα με το Βήμα 1, βρες την απόσταση του Γυμναστηρίου από τον Ισημερινό. Κάνε δεξί κλικ στο χάρτη κι επέλεξε «Μέτρηση απόστασης». Τοποθέτησε την έναρξη της μέτρησης στο κέντρο του Γυμναστηρίου. Στο πλαίσιο «Αναζήτηση στους χάρτες» γράψε μηδέν, κόμμα, κενό και το γεωγραφικό μήκος του Γυμναστηρίου. Με τον τρόπο αυτό θα κατευθυνθείς στην περιοχή του Ισημερινού (γεωγραφικό πλάτος 0) που έχει ίδιο γεωγραφικό μήκος με το Γυμναστήριο. Τοποθέτησε το σημείο λήξης στον δείκτη. Σημείωσε την απόσταση στον Πίνακα Μετρήσεων. (Μπορείς επίσης να χρησιμοποιήσεις την εφαρμογή Distance Calculator στο σύνδεσμο <https://www.distance.to/#>).

Βήμα 3^ο (στην τάξη) – Υπολογισμός ώρας μέτρησης

Στη διεύθυνση <https://www.timeanddate.com/sun/@265040> βρες την ώρα που μεσουρανή ο ήλιος τη μέρα της Ισημερίας (ηλιακό μεσημέρι). Πρόσεξε η τοποθεσία να είναι **Andros South Aegean** και η ημερομηνία **20 Μαρτίου 2022**. Σημείωσε την ώρα του μεσημεριού στον Πίνακα Μετρήσεων.

Βήμα 4^ο (στο Γυμναστήριο) – Μήκος ράβδου

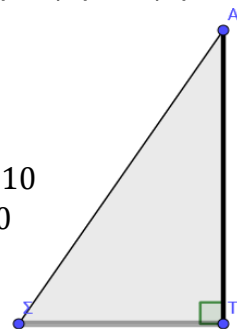
Μέτρησε με προσοχή το μήκος της ράβδου που θα χρησιμοποιήσεις. Σημείωσέ το στον Πίνακα Μετρήσεων.

Βήμα 5^ο (στο Γυμναστήριο) – Μήκος σκιάς

Τοποθέτησε στο οριζόντιο δάπεδο ένα μεγάλο άσπρο χαρτόνι. Στερέωσε τη ράβδο έτσι ώστε να είναι σταθερή και κατακόρυφη. Είναι σημαντικό να ελέγξεις την κατακόρυφη στήριξη με το νήμα της στάθμης. Την ώρα που ο ήλιος μεσουρανή, μέτρησε με πολλή προσοχή το μήκος της σκιάς της ράβδου. Είναι σημαντικό η μέτρηση αυτή να γίνει με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. Σημείωσε την τιμή του μήκους της σκιάς στον Πίνακα Μετρήσεων.

Βήμα 6^ο (στο Γυμναστήριο) – Υπολογισμός γωνίας $\hat{\varphi}$

Σχεδίασε στο χαρτόνι ένα τρίγωνο στο οποίο η κατακόρυφη πλευρά του (AT) είναι 10 φορές μικρότερη από το μήκος της ράβδου και η οριζόντια πλευρά του (ΣΤ) είναι 10 φορές μικρότερη από το μήκος της σκιάς. Στο τρίγωνο αυτό βρες την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\varphi}$. Από τον Πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρες τη γωνία $\hat{\varphi}$ και γράψε την στον Πίνακα Μετρήσεων.



Καλή Επιτυχία!!!

Πίνακας Μετρήσεων

Βήμα 1 ^ο	Γεωγραφικές συντεταγμένες – Γεωγραφικό πλάτος Γεωγραφικό μήκος	
Βήμα 2 ^ο	Απόσταση Γυμναστηρίου από τον Ισημερινό	
Βήμα 3 ^ο	Η ώρα που μεσουρανάει ο ήλιος	
Βήμα 4 ^ο	Το μήκος της ράβδου	
Βήμα 5 ^ο	Το μήκος της σκιάς της ράβδου	
Βήμα 6 ^ο	Η τιμή της γωνίας $\hat{\varphi}$	

Υπολογισμοί

$$\varepsilon \varphi \hat{\varphi} = \frac{T\Sigma}{TA} = \dots\dots\dots \text{ και } \hat{\varphi} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Περίμετρος } S = TI \cdot \frac{360}{\varphi} \Rightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow S = \dots\dots\dots \text{ km}$$

$$\text{Ακτίνα Γης } R = \frac{S}{2 \cdot 3,14159} = \dots\dots\dots \text{ Km}$$

(Ενδεικτική τιμή $R = 6370 \text{ km}$)