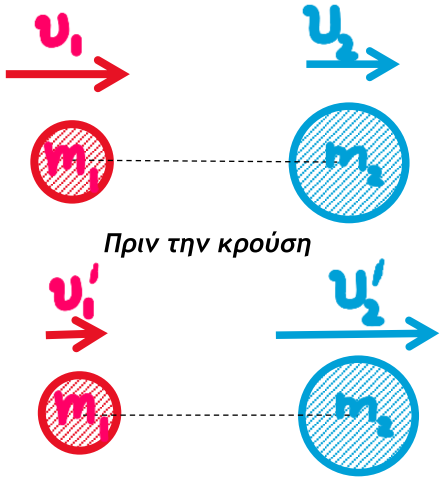
Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών (σε μία διάσταση)

Απόδειξη τύπων ταχυτήτων σφαιρών μετά την κρούση και διερεύνηση



Το πρόβλημα: Δύο σφαίρες Σ1 και Σ2 έχουν μάζες m_1 και m_1 και κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα των ταχυτήτων τους $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ (μέτρα v_1 και v_2) να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Οι σφαίρες συγκρούονται **ελαστικά** και **κεντρικά**.

Ζητούνται τα μέτρα των ταχυτήτων $\vec{v}_1'$και $\vec{v}_2'$ των σφαιρών μετά την κρούση.

Λύση

Κατά την κρούση δύο σωμάτων, όπως είναι οι σφαίρες του προβλήματος, η συνολική ορμή διατηρείται. Η πρόταση αυτή διανυσματικό γράφεται

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$$

Και αλγεβρικά

$$P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1)$$

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών διατηρείται.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' - m_2 v_2$$

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \quad (3)$$

Και από την εξίσωση (2)

$$m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 = m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \quad (4)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (4) και (3) κατά μέλη και υποθέτοντας ότι $v_1 \neq v_1'$ και $v_2 \neq v_2'$ βρίσκουμε

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

$$v_1' = v_2' + v_2 - v_1 \quad (5)$$

Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα της (5) στην (1)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 (v_2' + v_2 - v_1) + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_2' + m_1 v_2 - m_1 v_1 + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_1 + m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2 = m_1 v_2' + m_2 v_2'$$

$$2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2 = (m_1 + m_2) v_2'$$

$$\boxed{v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, v_2} \qquad \textbf{(6)}$$

Τέλος αντικαθιστούμε την (6) στην (5)

$$v_1' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, v_2 + v_2 - v_1$$

$$v_1' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, v_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} v_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_1' = \frac{2m_1 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 \cancel{- m_1} + \cancel{m_1} + m_2}{m_1 + m_2}\, v_2$$

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, v_2} \qquad \textbf{(7)}$$

<u>**Διερεύνηση**</u>

Α. Οι συγκρουόμενες σφαίρες έχουν ίσες μάζες

Όταν οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες δηλαδή $m_1 = m_2 = m$ τότε η (6) δίνει

$$v_2' = \frac{2m}{m + m} v_1 + \frac{\cancel{m} - \cancel{m}}{m + m}\, v_2$$

$$v_2' = \frac{\cancel{2m}}{\cancel{2m}} v_1$$

Και τελικά

$$\boldsymbol{v_2' = v_1} \qquad \textbf{(8)}$$

Η (7) γίνεται

$$v_1' = \frac{\cancel{m} - \cancel{m}}{m + m} v_1 + \frac{2m}{m + m}\, v_2$$

Και όμοια με πριν

$$\boldsymbol{v_1' = v_2} \qquad \textbf{(9)}$$

Παρατηρούμε ότι οι σφαίρες **ανταλλάσσουν ταχύτητες.**

Β. Η σφαίρα Σ$_2$ είναι αρχικά ακίνητη

Όταν η δεύτερη σφαίρα είναι ακίνητη, δηλαδή $v_2 = 0$, τότε από τις εξισώσεις (6) και (7) παίρνουμε

$$\boxed{v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1} \qquad \textbf{(10)}$$

Και

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1} \qquad \textbf{(11)}$$

- ✓ Παρατηρούμε ότι $\frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1 > 0$. Επομένως μετά την κρούση η ταχύτητα της Σ$_2$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την αρχική ταχύτητα της Σ$_1$ ($\vec{v}_2' \uparrow\uparrow \vec{v}_1$).

- ✓ Αν η σφαίρα Σ$_1$ έχει μεγαλύτερη μάζα από την σφαίρα αρχικά ακίνητη σφαίρα Σ$_2$, προφανώς $m_1 - m_2 > 0$. Επομένως $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} v_1 > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η τελική ταχύτητα της Σ$_1$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την αρχική, δηλαδή δεν αλλάζει η φορά της κίνησης ($\vec{v}_1' \uparrow\uparrow \vec{v}_1$).

- ✓ Αν η σφαίρα Σ$_1$ έχει μικρότερη μάζα από τη σφαίρα Σ$_2$ τότε $m_1 - m_2 < 0$. Άρα $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} v_1 < 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα της Σ$_1$ αλλάζει κατεύθυνση μετά την κρούση, δηλαδή κινείται προς τα πίσω ($\vec{v}_1' \downarrow\uparrow \vec{v}_1$).

- ✓ Αν η μάζα της αρχικά ακίνητης σφαίρας Σ$_2$ είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν της Σ$_1$ δηλαδή $m_2 \gg m_1$, τότε $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$. Τότε

$$(11) \Rightarrow v_1' = \frac{\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}} v_1 \approx \frac{0-1}{0+1} v_1 \Rightarrow v_1' = -v_1$$

Και

$$(10) \Rightarrow v_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}} v_1 \approx \frac{2 \cdot 0}{0+1} v_1 \Rightarrow v_2' = 0$$

Επομένως μετά την κρούση η ταχύτητα της Σ$_1$ αντιστρέφεται ενώ η Σ$_2$ παραμένει ακίνητη.

- ✓ Αν η μάζα της αρχικά ακίνητης σφαίρας Σ$_2$ είναι πολύ μικρότερη από αυτήν της Σ$_1$ δηλαδή $m_2 \ll m_1$, τότε $\frac{m_2}{m_1} \approx 0$. Τότε

$$(11) \Rightarrow v_1' = \frac{\frac{m_1}{m_1} - \frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \approx \frac{1-0}{1+0} v_1 \Rightarrow v_1' = v_1$$

Και

$$(10) \Rightarrow v_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \approx \frac{2 \cdot 1}{1 + 0} v_1 \Rightarrow v_2' = 2v_1$$

Επομένως μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 εξακολουθεί να κινείται με την ίδια περίπου ταχύτητα ενώ η σφαίρα Σ_2 κινείται με περίπου διπλάσια ταχύτητα.

Επιμέλεια
Δήμητρα Δουδουσάκη

Σύνδεσμος μαθήματος
https://wp.me/pbPz0Z-3ll