

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ταυτότητα : ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών

Βασικές ταυτότητες

$$\text{i)} \quad (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\text{ii)} \quad (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\text{iii)} \quad (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\text{iv)} \quad (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\text{v)} \quad (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\text{vi)} \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\text{vii)} \quad \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$1. \quad (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$2. \quad (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$3. \quad (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Απόδειξη

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha - \beta \cdot \beta = \alpha^2 - \beta^2$$

$$4. \quad (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \end{aligned}$$

$$5. (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^3 &= (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\&= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 \\&= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3\end{aligned}$$

$$6. (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha \cdot \alpha^2 - \alpha \cdot \alpha\beta + \alpha \cdot \beta^2 + \beta \cdot \alpha^2 - \beta \cdot \alpha\beta + \beta \cdot \beta^2 \\&= \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3\end{aligned}$$

$$7. (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha \cdot \alpha^2 + \alpha \cdot \alpha\beta + \alpha \cdot \beta^2 - \beta \cdot \alpha^2 - \beta \cdot \alpha\beta - \beta \cdot \beta^2 \\&= \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3\end{aligned}$$

παραδείγματα

Να βρεθούν τα αναπτύγματα των παρακάτω ταυτοτήτων

$$\text{i)} \quad (x + 2)^2 =$$

$$\text{ii)} \quad (2x + 1)^2 =$$

$$\text{iii)} \quad (3\alpha - 2)^2 =$$

$$\text{iv)} \quad (-3 + \omega)^2 =$$

$$\text{v)} \quad (\beta + 1)(\beta - 1) =$$

$$\text{vi)} \quad (-5 + \lambda)(\lambda + 5) =$$

Λύση:

$$\text{i)} \quad (x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\text{ii)} \quad (2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\text{iii)} \quad (3\alpha - 2)^2 = (3\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha \cdot 2 + 2^2 = 9\alpha^2 - 12\alpha + 4$$

$$\text{iv)} \quad (-3 + \omega)^2 = (\omega - 3)^2 = \omega^2 - 2 \cdot \omega \cdot 3 + 3^2 = \omega^2 - 6\omega + 9$$

$$\text{v)} \quad (\beta + 1)(\beta - 1) = \beta^2 - 1^2 = \beta^2 - 1$$

$$\text{vi)} \quad (-5 + \lambda)(\lambda + 5) = (\lambda - 5)(\lambda + 5) = \lambda^2 - 5^2 = \lambda^2 - 25$$

Ασκήσεις στις ταυτότητες

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα :

i) $(x + y)^2 =$

ii) $(x + 3y)^2 =$

iii) $\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right)^2 =$

iv) $(x^2 + y^2)^2 =$

v) $(2x + y)^2 =$

vi) $\left(\frac{x}{4} + y\right)^2 =$

vii) $(xy + y^2)^2 =$

viii) $\left(x^2 + \frac{1}{3}y^3\right)^2 =$

2) Να βρείτε τα αναπτύγματα

i) $(x - y)^2 =$

ii) $(6 - 4x)^2 =$

iii) $\left(2x - \frac{y}{4}\right)^2 =$

iv) $\left(x^2 - \frac{1}{4}\alpha\beta\right)^2 =$

v) $(a - 4)^2 =$

vi) $(4x - 5y)^2 =$

vii) $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 =$

viii) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}y^3\right)^2 =$

3) Να βρείτε τα αναπτύγματα :

i) $(-x - 3)^2 =$

ii) $(-x + 4)^2 =$

iii) $(-2x + 5y)^2 =$

iv) $\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}y^3\right)^2 =$

7) Να βρείτε τα αναπτύγματα :

i) $(x + y + \omega)^2 =$ ii) $(x - y + \omega)^2 =$ iii) $(x + y - \omega)^2 =$

8) Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις :

i) $-2(2 + 3\omega)^3 - \omega(\omega + 2)(\omega - 2) + (\omega - 1)^3 =$

4) Να βρείτε τα αναπτύγματα :

i) $(x - 3)(x + 3) =$

ii) $(1 + xy)(1 - xy) =$

iii) $(-a + 3\beta)(\alpha + 3\beta) =$

iv) $(3xy - 4\alpha\beta)(3xy + 4\alpha\beta) =$

v) $(1 - x^2)(1 + x^2) =$

vi) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) =$

vii) $(-x - 2y)(-x + 2y) =$

5) Να κάνετε τις πράξεις :

α) $(x + y + \omega)(x + y - \omega) =$

β) $(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta - 1) =$

γ) $(x - y + \omega)(x + y + \omega) =$

δ) $(x + y + \omega - 2)(x + y - \omega + 2) =$

6) Να βρείτε τα αναπτύγματα :

i) $(x + y)^3 =$

ii) $(2\alpha + 3\beta)^3 =$

iii) $(2\alpha - 4\beta)^3 =$

iv) $(\alpha + 2)^3 =$

v) $(x - 2)^3 =$

vi) $(-x - 2y)^3 =$

vii) $(-x - 2y^2) =$

viii) $(-a + 2)^3 =$

$$\text{ii)} \quad (x - y)^3 - (x + y)^3 + 3(x - y)(x + y) =$$

9) Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις :

$$\text{i)} \quad (3\alpha + 4\beta)^2 - 3(\alpha - \beta)^2 - (5\alpha - 2\beta)^2 =$$

$$\text{ii)} \quad 2(\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta) - (\alpha - 2\beta)^2 - 3\alpha(\alpha + \beta) =$$

$$\text{iii)} \quad (3x + 4y)(3x - 4y) - (y - 2x)(y + 2x) =$$

$$\text{iv)} \quad (7\kappa - \lambda)^2 - (8\kappa - 3\lambda)(8\kappa + 3\lambda) - (\kappa + 2\lambda)^2 =$$

10) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 6\alpha\beta + 2\beta^2$

Αν γνωρίζουμε ότι : $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

11) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή

$$\text{i)} \quad \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

12) Αν $x + y = 6$ και $xy = 8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = x^2 + y^2$

όπου $x, y > 0$

13) Αν $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, $x \neq 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad B = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

